ΜΑΘΗΜΑ 9
Γενικές ασκήσεις μιγαδικών

1.

Για το μιγαδικό z δίνεται ότι $|6z+1|=|4z-1|$. Να βρείτε

i) το $|2z+1|$

ii) το σύνολο τιμών του $|2z-i|$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Εξαντλούμε την υπόθεση

$$|6z+1|=|4z-1| \Rightarrow |6z+1|^2=|4z-1|^2$$
$$(6z+1)(6\bar{z}+1)=(4z-1)(4\bar{z}-1)$$
$$36z\bar{z}+6z+6\bar{z}+1=16z\bar{z}-4z-4\bar{z}+1$$
$$20z\bar{z}+10z+10\bar{z}$$
$$2|z|^2+z+\bar{z}=0 \quad \textbf{(1)}$$

$$\begin{aligned}|2z+1|^2 &= (2z+1)(2\bar{z}+1)\\ &= 4z\bar{z}+2z+2\bar{z}+1\\ &= 4|z|^2+2z+2\bar{z}+1\\ &= \left[2|z|^2+z+\bar{z}\right]+1 \overset{(1)}{=} 2.0+1=1\end{aligned}$$

Άρα $|2z+1|=1$

ii)

Εκφράζουμε τον ζητούμενο $2z-i$ συναρτήσει του γνωστού $2z+1$

$2z-i=2z-i+1-1=(2z+1)+(-1-i)$

$$|2z-i| = |(2z+1)+(-1-i)| \leq |(2z+1)|+|-1-i| = 1+\sqrt{2} \quad \textbf{(2)}$$

$$|2z-i| = |(2z+1)+(-1-i)| \geq \big||2z+1|-|-1-i|\big| = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1 \quad \textbf{(3)}$$

Από τις (2), (3) συμπεραίνουμε ότι $\sqrt{2}-1 \leq |2z-i| \leq \sqrt{2}+1$

Επομένως το σύνολο τιμών του $|2z-i|$ είναι το διάστημα $\left[\sqrt{2}-1\ ,\ \sqrt{2}+1\right]$

2.

Για τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 δίνεται ότι $|z_1| = 1,\ \ |z_2| = 3,\ \ |z_3| = 5$.

Να αποδείξετε ότι **i)** $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$

ii) $\left|\dfrac{25z_1z_2 + z_2z_3 + 9z_1z_3}{z_1 + z_2 + z_3}\right| = 15$

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, τότε $z_1 + z_2 = -z_3 \Rightarrow |z_1 + z_2| = |z_3| = 5$.

Θα έχουμε $5 = |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| = 1 + 3 = 4$ που είναι άτοπο.

ii)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{|25z_1z_2 + z_2z_3 + 9z_1z_3|}{|z_1 + z_2 + z_3|} = 15 \Leftrightarrow$

$$|25z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1| = 15\,|z_1 + z_2 + z_3|$$

$|z_1| = 1 \Rightarrow \bar{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}$, $\quad |z_2| = 3 \Rightarrow \bar{z}_2 = \dfrac{9}{z_2}$, $\quad |z_3| = 5 \Rightarrow \bar{z}_3 = \dfrac{25}{z_3}$

$$|25z_1z_2 + z_2z_3 + 9z_3z_1| = \left|\overline{25z_1z_2 + z_2z_3 + 9z_3z_1}\right| = |25\bar{z}_1\bar{z}_2 + \bar{z}_2\bar{z}_3 + 9\bar{z}_3\bar{z}_1| =$$

$$= \left|25\frac{1}{z_1}\frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_2}\frac{25}{z_3} + 9\frac{25}{z_3}\frac{1}{z_1}\right| = 25.\,9\left|\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_2}\frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_3}\frac{1}{z_1}\right|$$

$$= 25.\,9\left|\frac{z_3 + z_1 + z_2}{z_1z_2z_3}\right| = 25.\,9\,\frac{|z_1 + z_2 + z_3|}{|z_1z_2z_3|}$$

$$= 25.\,9\,\frac{|z_1 + z_2 + z_3|}{|z_1||z_2||z_3|} = 25.\,9\,\frac{|z_1 + z_2 + z_3|}{1.\,3.\,5} = 15\,|z_1 + z_2 + z_3|$$

3.

Αν για τον $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z| = 1$ να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{z - \bar{z}}{2} + i\right| + \left|\dfrac{z - \bar{z}}{2} - i\right| = 2$.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $z = x + yi$

$$\left|\frac{z - \bar{z}}{2} + i\right| + \left|\frac{z - \bar{z}}{2} - i\right| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{2yi}{2} + i\right| + \left|\frac{2yi}{2} - i\right| = 2$$

$$|yi + i| + |yi - i| = 2$$

$$|i(y+1)| + |i(y-1)| = 2$$

$$|i|\,|y+1| + |i|\,|y-1| = 2$$

$|y+1| + |y-1| = 2$, που αρκεί να αποδειχθεί

$|z| = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

$$0 \leq x^2 = 1 - y^2$$

$$0 \le 1 - y^2$$
$$y^2 \le 1$$
$$|y| \le 1 \Rightarrow -1 \le y \le 1$$
$$-1 \le y \quad \text{και} \quad y \le 1$$
$$0 \le y+1 \quad \text{και} \quad y-1 \le 0$$

Άρα $|y+1|+|y-1| = y+1-(y-1) = y+1-y+1 = 2$

4.

Έστω οι $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ ώστε $2011^{|z_1|}z_1 + 2011^{|z_2|}z_2 = 2011^{|z_1-z_2|}(z_1+z_2)$. Να αποδείξετε ότι $|z_1-z_2| = |z_1| = |z_2|$ ή $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}^*$.

Προτεινόμενη λύση

Η υπόθεση $\Rightarrow$ $2011^{|z_1|}z_1 + 2011^{|z_2|}z_2 = 2011^{|z_1-z_2|}z_1 + 2011^{|z_1-z_2|}z_2$

$$2011^{|z_1|}z_1 - 2011^{|z_1-z_2|}z_1 = 2011^{|z_1-z_2|}z_2 - 2011^{|z_2|}z_2$$

$$z_1(2011^{|z_1|} - 2011^{|z_1-z_2|}) = z_2(2011^{|z_1-z_2|} - 2011^{|z_2|}) \quad \textbf{(1)}$$

- Όταν $2011^{|z_1|} - 2011^{|z_1-z_2|} \ne 0$, η (1) $\Rightarrow$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2011^{|z_1-z_2|} - 2011^{|z_2|}}{2011^{|z_1|} - 2011^{|z_1-z_2|}} \in \mathbb{R}^*$
- Όταν $2011^{|z_1|} - 2011^{|z_1-z_2|} = 0 \Rightarrow 2011^{|z_1|} = 2011^{|z_1-z_2|} \Rightarrow |z_1| = |z_1-z_2|$

  και η (1) $\Rightarrow 0 = z_2(2011^{|z_1-z_2|} - 2011^{|z_2|}) \Rightarrow 2011^{|z_1-z_2|} - 2011^{|z_2|} = 0 \Rightarrow$

  $2011^{|z_1-z_2|} = 2011^{|z_2|} \Rightarrow |z_1-z_2| = |z_2|$

* Να παρατηρήσουμε ότι ο αριθμός 2011 μπορεί να είναι ο οποιοσδήποτε θετικός .

5.

Για τους μιγαδικούς $w, z \ne 0$ δίνεται ότι $|w+iz|^2 = w^2 + z^2$. Να αποδείξετε ότι $|w| = |z|$ ή $(w \in \mathbb{R} \text{ και } z \in \mathbb{R})$.

Προτεινόμενη λύση

$|w+iz|^2 = w^2+z^2 \Rightarrow (w+iz)(\bar{w} - i\bar{z}) = w^2 - (iz)^2 \Rightarrow$

$$(w+iz)(\bar{w} - i\bar{z}) = (w-iz)(w+iz) \quad \textbf{(1)}$$

- Όταν $w+iz \ne 0$, η (1) $\Rightarrow \bar{w} - i\bar{z} = w - iz \Rightarrow iz - i\bar{z} = w - \bar{w} \Rightarrow$

  $i(z-\bar{z}) = w - \bar{w} \Rightarrow i\,2i\,\mathrm{Im}(z) = 2i\,\mathrm{Im}(w)$

  $i\,\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w) \Rightarrow$

  $\mathrm{Im}(z) = 0$ και $\mathrm{Im}(w) = 0 \Rightarrow$

  $z \in \mathbb{R}$ και $w \in \mathbb{R}$

- Όταν $w+iz = 0 \Rightarrow w = -iz \Rightarrow |w| = |-iz| \Rightarrow |w| = |z|$

6.

Για τους μιγαδικούς w, z δίνεται ότι $4z^2 + 9w^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{|z|}{3} = \frac{|w|}{2} = \frac{|z-w|}{\sqrt{13}}$$

Προτεινόμενη λύση

$$4z^2 + 9w^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4z^2 - i^2 9w^2 = 0$$

$$(2z)^2 - (3iw)^2 = 0$$

$$(2z - 3iw)(2z + 3iw) = 0$$

$$2z - 3iw = 0 \quad \text{ή} \quad 2z + 3iw = 0$$

$$2z = \pm 3iw \qquad \mathbf{(1)}$$

$$|2z| = |\pm 3iw|$$

$$2|z| = 3|w| \quad \Rightarrow \quad \frac{|z|}{3} = \frac{|w|}{2}$$

$$(1) \quad \Rightarrow \quad z = \pm \frac{3}{2} iw$$

$$|z - w| = \left| \pm \frac{3}{2} iw - w \right| = \left| w(\pm \frac{3}{2} i - 1) = |w| \left| -1 \pm \frac{3}{2} i \right| = |w| \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = |w| \frac{\sqrt{13}}{2}\right.$$

Άρα $|z - w| = |w| \dfrac{\sqrt{13}}{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{|z-w|}{\sqrt{13}} = \dfrac{|w|}{2}$

7.

Αν για τον $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $\left| z + |z| \right| + \left| z - |z| \right| = 2|z|$, δείξτε ότι $z \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη.

Ύψωσε τα δύο μέλη στο τετράγωνο, Πράξεις – αναγωγή ομοίων όρων

Οπότε $z^2 - |z|^2 = 0 \qquad z^2 - z\bar{z} = 0 \qquad z(z - \bar{z}) = 0$

8.

Για κάθε $z \in \mathbb{C}^*$, $\nu \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών

$w = \left(\dfrac{z}{|z|} + 1 \right)^{2\nu}$ και $u = \left(\dfrac{z}{|z|} - 1 \right)^{2\nu}$ ορίζουν ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Προτεινόμενη λύση

Δες πρώτα στο Μάθημα 6 την άσκηση – πρόταση 19

Είναι $w = \left(\dfrac{z}{|z|} + 1 \right)^{2\nu} = \left(\dfrac{z + |z|}{|z|} \right)^{2\nu}$ και $u = \left(\dfrac{z}{|z|} - 1 \right)^{2\nu} = \left(\dfrac{z - |z|}{|z|} \right)^{2\nu}$

Αρκεί να ισχύει $u = \lambda w$, όπου $\lambda \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{u}{w} \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \left(\dfrac{z - |z|}{z + |z|} \right)^{2\nu} \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{z-|z|}{z+|z|}\right)^{2\nu}=\overline{\left(\frac{z-|z|}{z+|z|}\right)^{2\nu}} \Leftrightarrow \left(\frac{z-|z|}{z+|z|}\right)^{2\nu}=\left(\frac{\overline{z}-|z|}{\overline{z}+|z|}\right)^{2\nu} \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{z-|z|}{z+|z|}\right)^{2\nu}}{\left(\frac{\overline{z}-|z|}{\overline{z}+|z|}\right)^{2\nu}}=1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\frac{z-|z|}{z+|z|}}{\frac{\overline{z}-|z|}{\overline{z}+|z|}}\right)^{2\nu}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{(z-|z|)(\overline{z}+|z|)}{(z+|z|)(\overline{z}-|z|)}\right)^{2\nu}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{z\overline{z}+z|z|-|z|\overline{z}-|z|^2}{z\overline{z}-z|z|+|z|\overline{z}-|z|^2}\right)^{2\nu}=1 \Leftrightarrow$$

$(-1)^{2\nu}=1$ που ισχύει

9.

Αν για το μιγαδικό z ισχύει $z^{-6}+\overline{z}^{-6}=32^{-1}$, να αποδείξετε ότι $|z|\leq 2$

Προτεινόμενη λύση

$$z^{-6}+\overline{z}^{-6}=32^{-1} \Rightarrow z^{-6}+\overline{z^{-6}}=32^{-1}$$

$$2\mathrm{Re}\left(z^{-6}\right)=2^{-5}$$

$$\mathrm{Re}\left(z^{-6}\right)=2^{-6}$$

Άρα $z^{-6}=2^{-6}+yi \Rightarrow |z^{-6}|=\sqrt{\left(2^{-6}\right)^2+y^2}\geq\sqrt{\left(2^{-6}\right)^2}=2^{-6}$

$$|z|^{-6}\geq 2^{-6}$$

$$\frac{1}{|z|^6}\geq\frac{1}{2^6}$$

$$2^6\geq|z|^6$$

$$2\geq|z|$$

10.

Αποδείξτε ότι, η εξίσωση $\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z+2}+\ ...\ +\frac{5}{z+5}=0$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες.

Προτεινόμενη λύση

$\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z+2}+\ ...\ +\frac{5}{z+5}=0$ **(1)** $\Rightarrow$ (συζυγής στα δύο μέλη)

$\frac{1}{\overline{z}+1}+\frac{2}{\overline{z}+2}+\ ...\ +\frac{5}{\overline{z}+5}=0$ **(2)**

$$\boxed{z_1=z_2 \Rightarrow \overline{z}_1=\overline{z}_2}$$

$$(1)-(2) \Rightarrow \frac{1}{z+1}-\frac{1}{\overline{z}+1}+\frac{2}{z+2}-\frac{2}{\overline{z}+2}+\ ...\ +\frac{5}{z+5}-\frac{5}{\overline{z}+5}=0$$

$$\frac{\overline{z}+1-z-1}{(z+1)(\overline{z}+1)}+2\frac{\overline{z}+2-z-2}{(z+2)(\overline{z}+2)}+\ ...\ +5\frac{\overline{z}+5-z-5}{(z+5)(\overline{z}+5)}=0$$

$$\frac{\overline{z}-z}{|z+1|^2}+2\,\frac{\overline{z}-z}{|z+2|^2}+\;.\;\;.\;\;.\;+5\,\frac{\overline{z}-z}{|z+5|^2}=0\quad\Rightarrow$$

$$(\overline{z}-z)\left(\frac{1}{|z+1|^2}+\frac{2}{|z+2|^2}+\;.\;.\;.\;+\frac{5}{|x+5|^2}\right)=0\quad\overset{*}{\Rightarrow}$$

$$\overline{z}-z=0\quad\Rightarrow\quad\overline{z}=z\quad\Rightarrow\quad z\in\mathbb{R}$$

* Η ποσότητα της παρένθεσης είναι θετική σαν άθροισμα μέτρων.

11.

Θεωρούμε την εξίσωση $\frac{\lambda_1}{z-\alpha_1}+\frac{\lambda_2}{z-\alpha_2}+\;.\;.\;.\;+\frac{\lambda_1}{z-\alpha_1}=\lambda$ με άγνωστο $z\in\mathbb{C}$, όπου οι $\lambda_1,\ \lambda_2,\ .\ .\ .\ ,\lambda_\nu$ είναι θετικοί, και οι $\alpha_1,\ \alpha_2,\ .\ .\ .\ ,\alpha_\nu$ και λ είναι πραγματικοί $\neq 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει όλες τις ρίζες της πραγματικές.

Προτεινόμενη λύση

Πάμε με απαγωγή σε άτοπο

Έστω $z=x+yi$ με $y\neq 0$ μια καθαρά μιγαδική ρίζα της εξίσωσης **(1)**

Τότε ο z την επαληθεύει $\frac{\lambda_1}{z-\alpha_1}+\frac{\lambda_2}{z-\alpha_2}+\;.\;.\;.\;+\frac{\lambda_1}{z-\alpha_1}=\lambda$ **(2)**

Αν στην εξίσωση φανταστούμε την απαλοιφή των παρανομαστών, προκύπτει εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές. Οπότε ρίζα της εξίσωσης θα είναι και ο $\overline{z}$.

Τότε ο $\overline{z}$ την επαληθεύει $\frac{\lambda_1}{\overline{z}-\alpha_1}+\frac{\lambda_2}{\overline{z}-\alpha_2}+\;.\;.\;.\;+\frac{\lambda_1}{\overline{z}-\alpha_1}=\lambda$ **(3)**

$$(3)-(2)\ \Rightarrow\ \left(\frac{\lambda_1}{\overline{z}-\alpha_1}-\frac{\lambda_1}{z-\alpha_1}\right)+\left(\frac{\lambda_2}{\overline{z}-\alpha_2}-\frac{\lambda_2}{z-\alpha_2}\right)+\;.\;.\;.\;+\left(\frac{\lambda_\nu}{\overline{z}-\alpha_\nu}-\frac{\lambda_\nu}{z-\alpha_\nu}\right)=0$$

$$\lambda_1\frac{z-\alpha_1-\overline{z}+\alpha_1}{(\overline{z}-\alpha_1)(z-\alpha_1)}+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;+\lambda_\nu\frac{z-\alpha_\nu-\overline{z}+\alpha_\nu}{(\overline{z}-\alpha_\nu)(z-\alpha_\nu)}=0$$

$$\lambda_1\frac{z-\overline{z}}{|z-\alpha_1|^2}+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;+\lambda_\nu\frac{z-\overline{z}}{|z-\alpha_\nu|^2}=0$$

$$(z-\overline{z})\left(\frac{\lambda_1}{|z-\alpha_1|^2}+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;+\frac{\lambda_\nu}{|z-\alpha_\nu|^2}\right)=0$$

$z-\overline{z}=0$ αφού η παρένθεση είναι θετική

$z=\overline{z}$

$z\in\mathbb{R}$ που είναι άτοπο κατά την (1)

12.

Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$,να δείξετε ότι, η εξίσωση $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^\nu = \alpha+\beta i$ έχει ρίζες πραγματικές, τότε και μόνο τότε , όταν $\alpha^2+\beta^2=1$

Προτεινόμενη λύση

Ευθύ: (Η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές. Θα αποδείξουμε ότι $\alpha^2+\beta^2=1$)

Έστω x μία πραγματική ρίζα της εξίσωσης $\Rightarrow$

Όταν δε μπορούμε να γράφουμε ισοδυναμίες, διακρίνουμε το ευθύ από το αντίστροφο

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^\nu = \alpha+\beta i \;\Rightarrow\; \left|\frac{1+ix}{1-ix}\right|^\nu = |\alpha+\beta i| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\left|\frac{1+ix}{1-ix}\right| = \sqrt[2\nu]{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\frac{|1+ix|}{|1-ix|} = \sqrt[2\nu]{\alpha^2+\beta^2} \;\overset{*}{\Rightarrow}\; 1 = \sqrt[2\nu]{\alpha^2+\beta^2} \;\Rightarrow\; \alpha^2+\beta^2=1$$

* Είναι συζυγείς, άρα έχουν ίσα μέτρα

Αντίστροφο: (Ισχύει $\alpha^2+\beta^2=1$. Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^\nu = \alpha+\beta i$ έχει ρίζες πραγματικές)

Έστω $z\in\mathbb{C}$ μια ρίζα της εξίσωσης

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^\nu = \alpha+\beta i \;\Rightarrow\; \left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|^\nu = |\alpha+\beta i| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right| = 1 \;\Rightarrow\; \frac{|1+iz|}{|1-iz|} = 1 \;\Rightarrow\; |1+iz| = |1-iz|$$

$$|1+iz|^2 = |1-iz|^2 \;\Rightarrow\; (1+iz)(1-i\bar{z}) = (1-iz)(1+i\bar{z})$$

$$1 - i\bar{z} + iz + z\bar{z} = 1 + i\bar{z} - iz + z\bar{z} \;\Rightarrow$$

$$2iz = 2i\bar{z} \;\Rightarrow\; z=\bar{z} \;\Rightarrow\; z\in\mathbb{R}$$

13.

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} |z|=|w|=2 \\ \dfrac{z+w}{2+zw}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Προτεινόμενη λύση

Περιορισμός : $2+zw \neq 0$

$|z|=2 \;\Leftrightarrow\; |z|^2=4 \;\Leftrightarrow\; z\bar{z}=4 \;\Leftrightarrow\; \bar{z}=\frac{4}{z}$ και ομοίως $\bar{w}=\frac{4}{w}$

$\frac{z+w}{2+zw}=\frac{1}{3} \;\Leftrightarrow\; 3(z+w)=2+zw$ **(1)** $\;\Leftrightarrow\; 3(\bar{z}+\bar{w}) = 2+\bar{z}\,\bar{w}$

$$3\left(\frac{4}{z}+\frac{4}{w}\right) = 2+\frac{4}{z}\,\frac{4}{w}$$

$z_1=z_2 \;\Rightarrow\; \bar{z}_1=\bar{z}_2$

$$3\,.\,4\ \frac{w+z}{zw} = 2 + \frac{16}{zw}$$

$$6\,(z + w) = zw + 8 \qquad \textbf{(2)}$$

$(2) - (1):\quad 3(z + w) = 6 \quad\Leftrightarrow\quad z + w = 2 \quad\Leftrightarrow\quad w = 2 - z \qquad \textbf{(3)}$

$(1) \;\Leftrightarrow\; 3(z + 2 - z) = 2 + z\,(2 - z) \;\Leftrightarrow\; 6 = 2 + 2z - z^2 \;\Leftrightarrow\; z^2 - 2z + 4 = 0$

$\Delta = 4 - 16 = -12\,,\quad z = \dfrac{2 \pm i\sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$

$(3) \;\Leftrightarrow\; w = 2 - (1 \pm \sqrt{3}\,) = 2 - 1 \pm \sqrt{3} = 1 \pm \sqrt{3}$

Άρα $(z, w) = (1 + \sqrt{3}\,,\ 1 - \sqrt{3}\,)$ ή $(1 - \sqrt{3}\,,\ 1 + \sqrt{3}\,)$

Με αντικατάσταση στον περιορισμό διαπιστώνουμε ότι και οι δύο λύσεις είναι δεκτές.

14.

Οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 ορίζουν τρίγωνο $P_1P_2P_3$ με ορθόκεντρο την αρχή O.

Να δειχτεί ότι $z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_3$.

Το ορθόκεντρο οδηγεί σε γεωμετρία άρα σε συντεταγμένες

Προτεινόμενη λύση

Έστω $z_1 = x_1 + y_1 i,\quad z_2 = x_2 + y_2 i,\quad z_3 = x_3 + y_3 i$

$\overrightarrow{OP_1} \perp \overrightarrow{P_2P_3} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{OP_1}\,.\,\overrightarrow{P_2P_3} = 0 \;\Rightarrow\; x_1(x_3 - x_2) + y_1(y_3 - y_2) = 0$

$x_1x_3 - x_1x_2 + y_1y_3 - y_1y_2 = 0$

$x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_3 + y_1y_3 \qquad \textbf{(1)}$

κυκλικά $\quad x_2x_3 + y_2y_3 = x_2x_1 + y_2y_1 \qquad \textbf{(2)}$

και $\quad x_3x_1 + y_3y_1 = x_3x_2 + y_3y_2 \qquad \textbf{(3)}$

Για την ισότητα $\quad z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = z_3\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_3$

αρκεί να αποδείξουμε $\quad z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = z_3\bar{z}_1 + \overline{z_1\bar{z}_3}$

$2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = 2\mathrm{Re}(z_3\bar{z}_1)$

$\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = \mathrm{Re}(z_3\bar{z}_1)$

Αλλά $\quad z_1\bar{z}_2 = (x_1 + y_1 i)\,(x_2 - y_2 i) = (x_1x_2 + y_1y_2) + (\,\ldots\ldots\ldots)i$

οπότε $\quad \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = x_1x_2 + y_1y_2$

και ομοίως $\quad \mathrm{Re}(z_3\bar{z}_1) = x_3x_1 + y_3y_1$

Έτσι, αρκεί να αποδείξουμε ότι $x_1x_2 + y_1y_2 = x_3x_1 + y_3y_1$, που ισχύει από την (1)

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\quad z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_3$

15.

Οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 είναι διάφοροι μηδενός και διαφορετικοί μεταξύ τους.

Θεωρούμε τους μιγαδικούς $w_1 = \dfrac{z_1}{z_2 - z_3}$, $w_2 = \dfrac{z_2}{z_3 - z_1}$, $w_3 = \dfrac{z_3}{z_1 - z_2}$.

Αν οι w_1, w_2 είναι φανταστικοί να δειχθεί ότι και ο w_3 είναι φανταστικός.
Σ' αυτή την περίπτωση να δειχθεί ότι η αρχή των αξόνων είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $A_1A_2A_3$, όπου A_1, A_2, A_3 οι εικόνες των z_1, z_2, z_3.

Προτεινόμενη λύση

w_1 φανταστικός $\Rightarrow$ $w_1 = -\overline{w}_1$ $\Rightarrow$ $\dfrac{z_1}{z_2 - z_3} = -\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2 - \overline{z}_3}$

$$z_1(\overline{z}_2 - \overline{z}_3) = -\overline{z}_1(z_2 - z_3)$$
$$z_1\overline{z}_2 - z_1\overline{z}_3 = -\overline{z}_1 z_2 + \overline{z}_1 z_3$$
$$z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = z_1\overline{z}_3 + \overline{z}_1 z_3 \quad \textbf{(1)}$$

Ομοίως w_2 φανταστικός $\Rightarrow$ $z_2\overline{z}_3 + \overline{z}_2 z_3 = z_2\overline{z}_1 + \overline{z}_2 z_1$ **(2)**

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $w_3 = -\overline{w}_3$

$$\frac{z_3}{z_1 - z_2} = -\frac{\overline{z}_3}{\overline{z}_1 - \overline{z}_2}$$

……………………

…………………………

$$z_3\overline{z}_1 + \overline{z}_3 z_1 = z_3\overline{z}_2 + \overline{z}_3 z_2$$

που ισχύει από τις (1), (2) αφού έχουν κάποια μέλη τους ίσα.

Η συνέχεια είναι το αντίστροφο της άσκησης 14. Δούλεψε με τον ίδιο τρόπο.

16.

Έστω το σύνολο $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

i. Αν $z_1, z_2 \in S$ να αποδείξετε ότι $z_1 z_2 \in S$ και $\dfrac{1}{z_1} \in S$

ii. Να βρείτε όλους τους μιγαδικούς $z \in S$, για τους οποίους ισχύει $\dfrac{z^4 - z^2 - 1}{z^4 + z^2 - 1} \in \mathbb{R}$

Προτεινόμενη λύση

i)

$z_1, z_2 \in S \Rightarrow |z_1| = |z_2| = 1$

$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| = 1 \,.\, 1 = 1$, άρα $z_1 z_2 \in S$

$\left|\dfrac{1}{z_1}\right| = \dfrac{1}{|z_1|} = \dfrac{1}{1} = 1$ άρα $\dfrac{1}{z_1} \in S$

ii)

$z \in S \quad \Rightarrow \quad |z| = 1 \quad \Rightarrow \quad |z|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad z\overline{z} = 1 \quad \Rightarrow \quad \overline{z} = \dfrac{1}{z}$

$$\frac{z^4 - z^2 - 1}{z^4 + z^2 - 1} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad z^4 - z^2 - 1 = \lambda(z^4 + z^2 - 1)$$

$$z^4 - z^2 - 1 = \lambda z^4 + \lambda z^2 - \lambda$$

$$z^4 - z^2 - 1 - \lambda z^4 - \lambda z^2 + \lambda = 0$$

$$(1-\lambda)z^4 - (1+\lambda)z^2 - (1-\lambda) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$(1) \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)\overline{z}^4 - (1+\lambda)\overline{z}^2 - (1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)\frac{1}{z^4} - (1+\lambda)\frac{1}{z^2} - (1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda) - (1+\lambda)\, z^2 - (1-\lambda)\, z^4 = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

$$(1) + (2) \quad \Rightarrow \quad -2(1+\lambda)\, z^2 = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

- Όταν $1 + \lambda \neq 0$, η (3) $\Rightarrow$ $z^2 = 0$ $\Rightarrow$ $z = 0$ απορρίπτεται αφού $|z| = 0 \neq 1$
- Όταν $1 + \lambda = 0$ δηλαδή $\lambda = -1$, η (3) ισχύει για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

  Αλλά (1) $\Rightarrow$ $2z^4 - 2 = 0$

  $$z^4 - 1 = 0$$

  $$(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$$

  $$z^2 - 1 = 0 \quad ή \quad z^2 + 1 = 0$$

  $$z^2 = 1 \quad ή \quad z^2 = -1$$

  $$z = 1 \quad ή \quad -1 \quad ή \quad i \quad ή \quad -i$$

Ένας πιο κλασσικός τρόπος για το (ii)

$$\frac{z^4 - z^2 - 1}{z^4 + z^2 - 1} \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z^4 - z^2 - 1}{z^4 + z^2 - 1} = \frac{\overline{z}^4 - \overline{z}^2 - 1}{\overline{z}^4 + \overline{z}^2 - 1}$$

$$\frac{z^4 - z^2 - 1}{z^4 + z^2 - 1} = \frac{\dfrac{1}{z^4} - \dfrac{1}{z^2} - 1}{\dfrac{1}{z^4} + \dfrac{1}{z^2} - 1}$$

$$\frac{z^4 - z^2 - 1}{z^4 + z^2 - 1} = \frac{1 - z^2 - z^4}{1 + z^2 - z^4}$$

$$z^4 + z^6 - z^8 - z^2 - z^4 + z^6 - 1 - z^2 + z^4 = z^4 - z^6 - z^8 + z^2 - z^4 - z^6 - 1 + z^2 + z^4$$

$$4z^6 - 4z^2 = 0 \qquad (|z| = 1 \ \Rightarrow\ z \neq 0)$$

$$z^4 - 1 = 0$$

$$(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$$

$$z^2 - 1 = 0 \quad ή \quad z^2 + 1 = 0$$

$$z^2 = 1 \quad ή \quad z^2 = -1 \ \Leftrightarrow\ z = 1 \ ή\ -1 \ ή\ i \ ή\ -i$$

17.

Να βρεθεί ο μιγαδικός z^5, όταν $|z| = |z^5 + 1| = 1$.

Προτεινόμενη λύση

$z_1 = z_2 \;\Rightarrow\; |z_1| = |z_2|$
όχι αντίστροφα

$|z| = 1 \quad \Rightarrow \quad |z|^5 = 1 \quad \Rightarrow \quad |z^5| = 1$

Θέτουμε $z^5 = w$.

Η $|z^5| = 1$ γίνεται $|w| = 1 \;\Leftrightarrow\; |w|^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; w\bar{w} = 1 \;\Leftrightarrow\; \bar{w} = \dfrac{1}{w}$

Η $|z^5 + 1| = 1$ γίνεται

$$|w+1| = 1$$
$$|w+1|^2 = 1$$
$$(w+1)(\bar{w}+1) = 1$$
$$w\bar{w} + w + \bar{w} + 1 = 1$$
$$1 + w + \frac{1}{w} = 0$$
$$w + w^2 + 1 = 0$$
$$w^2 + w + 1 = 0$$

$\Delta = 1 - 4 = -3$ $\qquad w = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ άρα $z^5 = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

18.

Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με εικόνες Α,Β,Γ αντίστοιχα, για τους οποίους ισχύει $z_1 \neq z_3$ και $z_1 - z_2 = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_1 - z_3)$. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Πάμε για $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$

Προτεινόμενη λύση

$$z_1 - z_2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_1 - z_3) \quad \Rightarrow \quad |z_1 - z_2| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| |z_1 - z_3| \qquad \textbf{(1)}$$

αλλά $\left|\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = \sqrt{\dfrac{4}{4}} = 1$

(1) $\Rightarrow$ $|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3|$ $\Rightarrow$ (ΒΑ) = (ΓΑ)

$$z_1 - z_2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_1 - z_3) \quad \Rightarrow \quad -z_2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_1 - z_3) - z_1$$

$$z_3 - z_2 = z_3 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_1 - z_3) - z_1$$

$$z_3 - z_2 = z_3 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_1 - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_3 - z_1$$

$$z_3 - z_2 = z_1\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) - z_3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$$

$$z_3 - z_2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)(z_1 - z_3)$$

$$z_3 - z_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_1 - z_3)$$

$$|z_3 - z_2| = \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| \, |z_1 - z_3| \quad \textbf{(2)}$$

αλλά $\left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

(2) $\Rightarrow$ $|z_3 - z_2| = |z_1 - z_3|$ $\Rightarrow$ (ΒΓ) = (ΓΑ)

19.

i) Για τους $z, w \in \mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{O\Lambda} = \operatorname{Re}(z\overline{w})$, όπου Κ, Λ οι εικόνες των z, w στο μιγαδικό επίπεδο.

ii) Έστω οι $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1\left(z_2^2 + z_3^2\right) + z_2\left(z_3^2 + z_1^2\right) + z_3\left(z_1^2 + z_2^2\right) = 0$

Σύνδεση των μιγαδικών με το εσωτερικό γινόμενο

Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{O\Gamma}.\overrightarrow{OA} = 0$, όπου Α,Β,Γ οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο.

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω $z = x + yi$ και $w = u + vi$

$\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{O\Lambda} = xu + yv$ **(1)**

$z\overline{w} = (x + yi)(u - vi) = xu + yv + (\quad\quad)i \Rightarrow \operatorname{Re}(z\overline{w}) = xu + yv$ **(2)**

(1), (2) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{O\Lambda} = \operatorname{Re}(z\overline{w})$

ii)

Αρκεί να δειχθεί ότι $\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) + \operatorname{Re}(z_2\overline{z}_3) + \operatorname{Re}(z_3\overline{z}_1) = 0$

ή αρκεί $\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_3 + z_3\overline{z}_1) = 0$

δηλαδή αρκεί ο $z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_3 + z_3\overline{z}_1$ να είναι φανταστικός

ή αρκεί $z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_3 + z_3\overline{z}_1 = -\overline{(z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_3 + z_3\overline{z}_1)}$

$$z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_3 + z_3\overline{z}_1 + \overline{(z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_3 + z_3\overline{z}_1)} = 0$$

$$z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_3 + z_3\overline{z}_1 + \overline{z}_1 z_2 + \overline{z}_2 z_3 + \overline{z}_3 z_1 = 0$$

$$z_1\frac{1}{z_2} + z_2\frac{1}{z_3} + z_3\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_1}z_2 + \frac{1}{z_2}z_3 + \frac{1}{z_3}z_1 = 0$$

$$z_1^2 z_3 + z_2^2 z_1 + z_3^2 z_2 + z_2^2 z_3 + z_3^2 z_1 + z_1^2 z_2 = 0$$

$$z_1\left(z_2^2 + z_3^2\right) + z_2\left(z_3^2 + z_1^2\right) + z_3\left(z_1^2 + z_2^2\right) = 0 \quad \text{που ισχύει από υπόθεση}$$

20.

Για τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 δίνεται ότι $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

i) Αν $\text{Re}(z_1\,\overline{z}_2) = 3$ και κυκλικά , να υπολογίσετε το $|z_1 + z_2|$ και κυκλικά

ii) Να αποδείξετε ότι $\text{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) + \text{Re}\left(\dfrac{z_2}{z_3}\right) + \text{Re}\left(\dfrac{z_3}{z_1}\right) \geq -3$

Προτεινόμενη λύση

Θυμίζουμε την ισοδυναμία : $|z| = 1 \;\Leftrightarrow\; z\,\overline{z} = 1 \;\Leftrightarrow\; \overline{z} = \dfrac{1}{z}$

i)

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = \\
&= z_1\,\overline{z}_1 + z_1\,\overline{z}_2 + z_2\,\overline{z}_1 + z_2\,\overline{z}_2 = \\
&= |z_1|^2 + z_1\,\overline{z}_2 + \overline{z_1\overline{z}_2}\ \overline{z}_1 + |z_2|^2 = \\
&= 1 + 2\,\text{Re}(z_1\,\overline{z}_2) + 1 = \\
&= 2 + 2\,\text{Re}(z_1\,\overline{z}_2) = \quad \textbf{(1)} \\
&= 2 + 2\,.\,3 = 8 \qquad \text{άρα} \qquad |z_1 + z_2| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

ii)

Από την (1) έχουμε $2 + 2\,\text{Re}(z_1\,\overline{z}_2) = |z_1 + z_2|^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; 1 + \text{Re}(z_1\,\overline{z}_2) \geq 0$

$$\text{Re}(z_1\,\overline{z}_2) \geq -1$$

$$\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \geq -1$$

Κυκλικά και προσθέτουμε κατά μέλη

21.

Για τους μιγαδικούς z_1, $z_2 \neq 0$ και τον πραγματικό $\alpha \neq \pm 1$ δίνεται ότι

$|z_1 + \alpha z_2| = |z_2 + \alpha z_1|$. Να αποδείξετε ότι $\left| z_1\left|\dfrac{z_1^3}{z_2} + z_2^2\right| + z_2\left|\dfrac{z_2^3}{z_1} + z_1^2\right| \right| \leq 4\left|z_1^3\right|$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}
|z_1 + \alpha z_2| = |z_2 + \alpha z_1| \quad \Leftrightarrow \qquad & |z_1 + \alpha z_2|^2 = |z_2 + \alpha z_1|^2 \\
& (z_1 + \alpha z_2)(\overline{z}_1 + \alpha\,\overline{z}_2) = (z_2 + \alpha z_1)(\overline{z}_2 + \alpha\,\overline{z}_1) \\
& z_1\,\overline{z}_1 + z_1\alpha\,\overline{z}_2 + \alpha z_2\,\overline{z}_1 + \alpha^2 z_2\,\overline{z}_2 = z_2\,\overline{z}_2 + z_2\alpha\,\overline{z}_1 + \alpha z_1\,\overline{z}_2 + \alpha^2 z_1\,\overline{z}_1 \\
& |z_1|^2 + \alpha^2|z_2|^2 = |z_2|^2 + \alpha^2|z_1|^2 \\
& |z_1|^2 + \alpha^2|z_2|^2 - |z_2|^2 - \alpha^2|z_1|^2 = 0 \\
& \alpha^2\left(|z_2|^2 - |z_1|^2\right) - \left(|z_2|^2 - |z_1|^2\right) = 0 \\
& \left(|z_2|^2 - |z_1|^2\right)(\alpha^2 - 1) = 0 \\
& |z_1|^2 - |z_2|^2 = 0 \\
& |z_1|^2 = |z_2|^2 \\
& |z_1| = |z_2| \qquad \textbf{(1)}
\end{aligned}$$

Είναι $\left|z_1\left|\frac{z_1^3}{z_2}+z_2^2\right|+z_2\left|\frac{z_2^3}{z_1}+z_1^2\right|\right| = \left|z_1\left|\frac{z_1^3+z_2^3}{z_2}\right|+z_2\left|\frac{z_2^3+z_1^3}{z_1}\right|\right| =$

$$= \left|z_1\frac{|z_1^3+z_2^3|}{|z_2|}+z_2\frac{|z_2^3+z_1^3|}{|z_1|}\right| =$$

$$= |z_1^3+z_2^3|\left|z_1\frac{1}{|z_2|}+z_2\frac{1}{|z_1|}\right| \overset{(1)}{=}$$

$$= |z_1^3+z_2^3|\left|\frac{z_1+z_2}{|z_1|}\right| =$$

$$= |z_1^3+z_2^3|\frac{|z_1+z_2|}{|z_1|} \overset{(*)}{\leq}$$

$$\left(|z_1^3|+|z_2^3|\right)\frac{|z_1|+|z_2|}{|z_1|} =$$

$*$ Τριγωνική ανισότητα $$= \left(|z_1|^3+|z_2|^3\right)\frac{|z_1|+|z_2|}{|z_1|} \overset{(1)}{=}$$

$$= \left(|z_1|^3+|z_1|^3\right)\frac{|z_1|+|z_1|}{|z_1|} = 2|z_1|^3\frac{2|z_1|}{|z_1|} = 4|z_1|^3$$

22. Μεγάλης δυσκολίας

Αν για τους μιγαδικούς z, w ισχύει $|z| \leq |w|$, να αποδείξετε ότι

$$|1-z| - |1-w| \leq 1 + \frac{|z|}{|w|}$$

Προτεινόμενη λύση

Είναι $|1-z| \leq 1+|z|$ **(1)**

Είναι $|1-w| \geq |w|-1 \Rightarrow -|1-w| \leq 1-|w|$ **(2)**

(1) + (2) $\Rightarrow |1-z|-|1-w| \leq 2+|z|-|w|$ **(3)**

Από την (3) και την αποδεικτέα, αρκεί να αποδείξω ότι

$2+|z|-|w| \leq 1+\frac{|z|}{|w|}$ αρκεί $1+|z|-|w| \leq \frac{|z|}{|w|}$

$$|w|+|z|\,|w|-|w|^2 \leq |z|$$
$$0 \leq |w|^2+|z|-|z|\,|w|-|w|$$
$$0 \leq |w|\left(|w|-1\right)-|z|\left(|w|-1\right)$$
$$0 \leq \left(|w|-1\right)\left(|w|-|z|\right)$$

Αλλά $|z| \leq |w| \Rightarrow |w|-|z| \geq 0$

Οπότε αρκεί να αποδείξω $0 \leq |w|-1$

$$|w| \geq 1 \quad \textbf{(A)}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

1°) Όταν $|w| \geq 1$ ισχύει η (A) άρα και η αποδεικτέα

2°) Όταν $|w| < 1$

Τρ. ανισότητα : $|1-z| - |1-w| \leq |(1-z)-(1-w)| = 1-z-1+w| =$

$$= |w-z| \leq |w| + |z| = |w|\left(1+\frac{|z|}{|w|}\right) <$$

$$< 1.\left(1+\frac{|z|}{|w|}\right) = 1+\frac{|z|}{|w|}$$

23. Μεγάλης δυσκολίας

Για τους μιγαδικούς $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ δίνεται ότι $z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu = 0$

και $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_\nu| = 1$

Να αποδείξετε, ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z-z_1| + |z-z_2| + \ldots + |z-z_\nu| \geq \nu$

Προτεινόμενη λύση

Θυμίζουμε την ισοδυναμία : $|w| = 1 \Leftrightarrow w = \dfrac{1}{\overline{w}}$

$$|z-z_1| + |z-z_2| + \ldots + |z-z_\nu| = \left|z - \frac{1}{\overline{z}_1}\right| + \ldots\ldots$$

$$= \left|\frac{z\overline{z}_1 - 1}{\overline{z}_1}\right| + \ldots\ldots$$

$$= \frac{|z\overline{z}_1 - 1|}{|\overline{z}_1|} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{|z\overline{z}_1 - 1|}{1} + \ldots\ldots$$

$$= |\overline{z}_1 z - 1| + \ldots + |\overline{z}_\nu z - 1| \overset{*}{\geq}$$

$$|(\overline{z}_1 z - 1) + \ldots + (\overline{z}_\nu z - 1)| =$$

$$= |\overline{z}_1 z + \ldots + \overline{z}_\nu z - 1 - \ldots - 1| =$$

$$= |(\overline{z}_1 + \ldots + \overline{z}_\nu).z - \nu| =$$

$$= |0.z - \nu| = \nu$$

$*$ Τριγωνική ανισότητα για ν προσθετέους